b) $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n+2} x \, dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tg^n x + tg^{n+2} x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x (1 + tg^2 x) dx$$

$$= \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (n+1) tg^n x (1 + tg^2 x) dx$$

$$= \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) dx = \frac{1}{n+1} \left[f(x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1} \left[f(\frac{\pi}{4}) - f(0) \right]$$

or $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ et $f(0) = 0$ d'où $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

2°/ a)• $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $tg^n x \geq 0$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x \, dx \geq 0$

d'où $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $I_n \geq 0$.

• On a : $I_n - \frac{1}{n+1} = -I_{n+2}$ or $I_{n+2} \geq 0$ donc $-I_{n+2} \leq 0$

d'où $I_n - \frac{1}{n+1} \leq 0$ et par suite $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b) on a : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

Solution 8 :

1°/a) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

le signe de $f'(x)$ est celui de $-x$ d'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	2	↘	1